

文章编号:1000-8055(2013)02-0275-08

橡胶隔振器黏弹性 5 参数分数导数并联动力学模型

唐振寰, 罗贵火, 陈 伟, 杨国辉, 方建敏

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 以辅助动力装置(APU)橡胶隔振器为研究对象,建立了橡胶隔振器非线性分数导数动力学模型.提出了橡胶隔振器 5 参数分数导数频率相关性和振幅相关性并联模型.该模型能够使用较少的参数描述 APU 橡胶隔振器在宽广频率范围内的黏弹性特性.还分析研究了各参数对 APU 橡胶隔振器储存模量和损失模量的影响.利用数值求解的方法给出定量结果.研究结果表明并联模型能更好地描述 APU 橡胶隔振器宽广频率范围内的动态特性.为橡胶隔振器设计应用提供了理论基础.

关 键 词: 黏弹性; 动态特性; 橡胶隔振器; 分数导数; 振幅相关性

中图分类号: V21; O328

文献标志码: A

Parallel dynamic model of rubber isolator about five-parameter fractional derivatives

TANG Zhen-huan, LUO Gui-huo, CHEN Wei,

YANG Guo-hui, FANG Jian-min

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The dynamic model of nonlinear fractional derivatives was established for the research of an auxiliary power unit (APU) rubber isolator. The parallel model of five-parameter fractional derivative was presented, which concerned frequency and amplitude dependencies. The model can simulate viscoelastic properties in a wide range with few parameters. At the same time, the influence of every parameter on dynamic modulus and loss modulus as well as the methods of numerical solution were studied. The result shows that the model can be used to predict the dynamic properties in a wide range. It provided basis for design and application of rubber isolator.

Key words: viscoelasticity; dynamic characteristics; rubber isolator; fractional derivative; amplitude dependency

橡胶材料具有刚度可调、耐久性和可靠性好、性能稳定等优点,目前民航飞机 APU 隔振器大多采用硅橡胶材料制成,见图 1.橡胶材料属于黏弹性材料,黏弹性材料的形变不仅和作用的外力

大小有关,而且和预载、温度、加载历史等很多因素有关.为此,相关研究人员通过研究提出了橡胶隔振器多种动力学模型,如 Maxwell 模型、Kelvin-Voigt 模型(K-V 模型)、分数导数模型等.最

收稿日期:2012-01-19

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130131.0829.201302.275_006.html

作者简介:唐振寰(1982—),男,湖南衡阳人,博士生,主要从事发动机结构振动研究.

早将分数导数应用于黏弹性材料动力学模型的是 Caputo 和 Bagley. Caputo 和 Bagley 提出由分数导数代替传统黏性原件的动力学模型. 此后, Pritz^[1] 提出 4 参数分数导数模型 (也叫分数导数 Zener 模型), 并详细讨论了各个参数对损失系数、损失模量的影响, 认为分数导数 Zener 模型能更好地模拟黏弹性材料在宽广频率范围的动力特性. 此后, Schmidt 等^[2] 运用分数导数 Zener 模型做了隔振器的结构优化. Kim 等^[3] 用分数导数 Zener 模型分析了黏弹性梁的振动. 此外, 也有学者提出不同的分数导数模型, Fukunaga 等^[4] 在 K-V 模型的基础上提出了一种隔振器动力学模型, 能很好地吻合试验曲线. Yajima 等^[5] 提出广义的分数导数 Maxwell 模型, 并进行数学求解. Rossikhin 等^[6] 提出一个阻尼系数的分数导数模型, 并给出了解析解. Heymans 等^[7] 提出 3 阶梯 Zener 模型来模拟黏弹性材料, 并讨论了各个参数的影响.

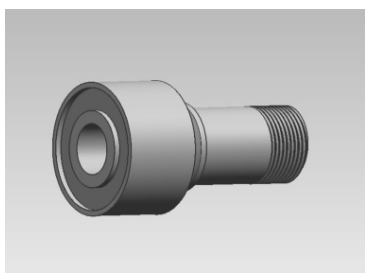


图 1 APU 橡胶隔振器结构

Fig. 1 Structure of APU rubber isolator

橡胶隔振器的动态特性不仅与频率有关, 还与振幅有关. Sjöberg 等^[8-9] 提出用超弹性力、黏弹性力、摩擦力 3 力叠加形成材料分数导数动力学模型, 认为摩擦力与频率无关, 仅与振幅有关, 而黏弹性力与振幅无关, 仅与频率有关. Negrete 等^[10] 通过大量试验得出结论: 非填充橡胶动刚度的位移幅值相关性较弱, 可以近似忽略位移幅值的影响, 而填充橡胶动刚度的位移幅值相关性较强.

试验研究方面, Negrete 等^[11] 提出了一种动力学试验方法验证了分数导数 Zener 模型. Kari^[12] 观测到橡胶隔振器分数导数 K-V 模型传递函数相位出现分叉现象, 并从理论上予以解释.

因为存在分数导数, 模型很难给出解析解, 大量文献研究了分数导数模型数值解的求解方法. Ortigueira^[13] 分析了分数导数的几种典型简化形

式和误差来源. Singh 等^[14] 讨论了分数导数卷积积分的数值解法. Méhauté 等^[15] 分析了分数导数中黎曼假设的条件和适用范围. Palfalvi^[16] 讨论了 K-V 分数导数模型的有效解.

本文通过试验, 发展了一种新模型, 该模型考虑了橡胶隔振器的频率相关性和振幅相关性, 且更能吻合隔振器在一个宽广频率范围内的动态特性; 分析了模型的动态特性的影响因素, 并给出了数值求解方法.

1 隔振器动力学模型

橡胶隔振器动态特性不仅与频率有关, 还与振幅有关. 本文假设振幅相关力与频率相关力相互独立, 用摩擦力表征振幅相关力, 用黏弹性力表征频率相关力. 将频率相关黏弹性力与振幅相关摩擦力相叠加, 得到数学模型, 见式(1).

$$m\ddot{u}(t) + f_v(t) + f_f(t) = f(t) \quad (1)$$

其中 $f_f(t)$ 为摩擦力; $f_v(t)$ 为黏弹性力; $f(t)$ 为激励力; m 为系统质量; $u(t)$ 为位移. 隔振器动力学模型见图 2.

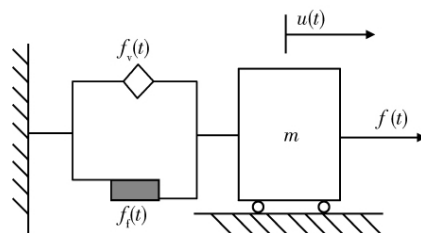


图 2 隔振器动力学模型

Fig. 2 Isolator dynamic model

1.1 振幅相关性模型

Sjöberg 等^[9] 认为振幅相关性力主要是填充物与橡胶之间的摩擦造成的, 表现为摩擦力. 摩擦力与频率无关, 仅与振幅有关.

由所给出状态参考点 (x_s, F_{fs}) , 摩擦力 f_f 可表示如下^[9]:

当 $x = x_s$ 时

$$f_f = F_{fs} \quad (2a)$$

当 $x > x_s$ 时

$$f_f = F_{fs} + \frac{x - x_s}{x_2(1 - \mu) + (x - x_s)} (F_{\max} - F_{fs}) \quad (2b)$$

当 $x < x_s$ 时

$$f_f = F_{fs} + \frac{x - x_s}{x_2(1 + \mu) + (x - x_s)} (F_{\max} + F_{fs}) \quad (2c)$$

其中 F_{fmax} 表示最大摩擦力; x_2 表示摩擦力等于最大摩擦力一半时的位移; $\mu = F_{fs}/F_{fmax}$, 取值区间为 $[-1, 1]$, 见图 3。

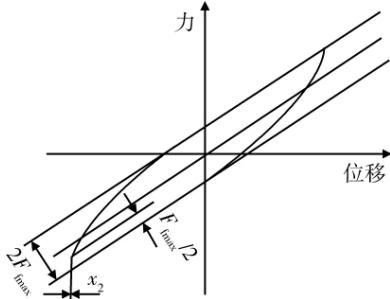


图 3 摩擦力-位移关系图

Fig. 3 Friction-displacement relation graph

由简谐位移激励 $x = x_0 \sin(\omega t)$ 可看出, 位移幅值为固定值, 所以当 $x = x_0$ 时摩擦力大小也应为固定值, 因而可得到橡胶隔振器在位移最大处的摩擦力 F_{f0} 以及每个循环摩擦力所损耗的能量 E_f 分别为^[9]

$$F_{f0} = \frac{F_{fmax}}{2x_0} (\sqrt{x_2^2 + x_0^2 + 6x_2x_0} - x_2 - x_0) \quad (3a)$$

$$E_f = 2F_{fmax} \left[2x_0 - x_2(1 + \mu_0)^2 \ln \frac{x_2(1 + \mu_0) + 2x_0}{x_2(1 + \mu_0)} \right] \quad (3b)$$

其中 $\mu_0 = F_{f0}/F_{fmax}$, 由式(3a)和式(3b)可以看出, F_{f0} 和 E_f 与频率 ω 无关。

1.2 摩擦模型参数识别

给隔振器施加稳态的正弦激励, 利用试验和数据分析识别摩擦力模型参数。为了尽量减小黏弹性力的影响, 应使用较低的激振频率和较大的激励幅值。当频率很低时, 式(1)中 $\ddot{m}u(t)$, $f_v(t)$ 的值均很低, 可以近似认为 $f_f(t) = f(t)$ 。试验采用频率为 1 Hz, 幅值为 0.4 mm 的稳态正弦激励。通过最小二乘法拟合得到摩擦模型的参数值, 见表 1。拟合与试验结果对比见图 4。

表 1 隔振器摩擦力拟合值

Table 1 Isolator friction fitting values

参数	F_{fmax}/N	x_2/mm
数值	187	0.2

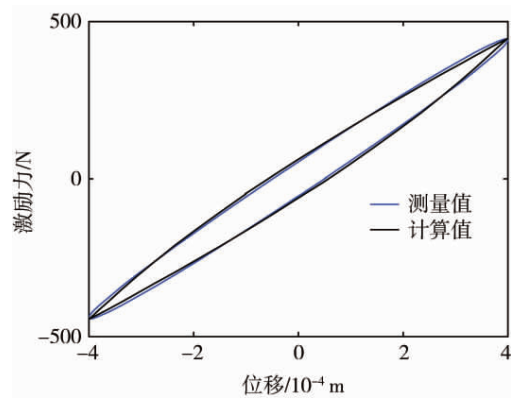


图 4 幅值为 0.4 mm 的迟滞环测试值和计算值

Fig. 4 Theoretical value and test value of hysteresis loops with amplitude of 0.4 mm

1.3 频率相关性模型

给隔振器施加稳态的正弦激励, 激励频率为 20~500 Hz, 测量隔振器的动态模量, 取不同的激励幅值, 测试结果见图 5(a), 通过数据分析识别黏弹性模型参数。识别过程中, 应去除试验数据里摩擦力和夹具附加质量的影响^[9]。传统黏弹性模型有 K-V 模型和三元固体模型等, 见式(4)、式(5), 拟合结果见图 5(b)、图 5(c), 蓝线为试验曲线, 黑线为拟合曲线。可见用传统模型拟合模拟隔振器的误差较大。分数导数模型因为能反映加载历史对动态特性的影响, 被广泛应用于黏弹性材料的动力学模型中。分数导数 K-V 模型见式(6), 其拟合结果能基本模拟隔振器的传递函数的实部 E_d , 但是虚部 E_l 的拟合仍不理想, 如图 5(d)。更进一步, 有学者提出分数导数 Zener 模型, 见式(7), 大量的研究表明: 分数导数 Zener 模型能更好地模拟隔振器动态特性。分数导数 Zener 模型的拟合结果见图 5(e)。虽然分数导数 Zener 模型能较好地模拟试验曲线, 但是对损失模量的拟合仍然有不尽人意的地方。本文尝试修改分数导数 Zener 模型, 得到 5 参数分数导数模型, 见式(8), 对损失模量的拟合优于分数导数 Zener 模型, 见图 5(f)。

$$f_v(t) = bu(t) + c\dot{u}(t) \quad (4)$$

$$f_v(t) + af_v(t) = bu(t) + c\dot{u}(t) \quad (5)$$

$$f_v(t) = bu(t) + cu^{(\alpha)}(t) \quad (6)$$

$$f_v(t) + af_v^{(\alpha)}(t) = bu(t) + cu^{(\alpha)}(t) \quad (7)$$

$$f_v(t) + af_v^{(\alpha)}(t) = bu(t) + cu^{(\beta)}(t) \quad (8)$$

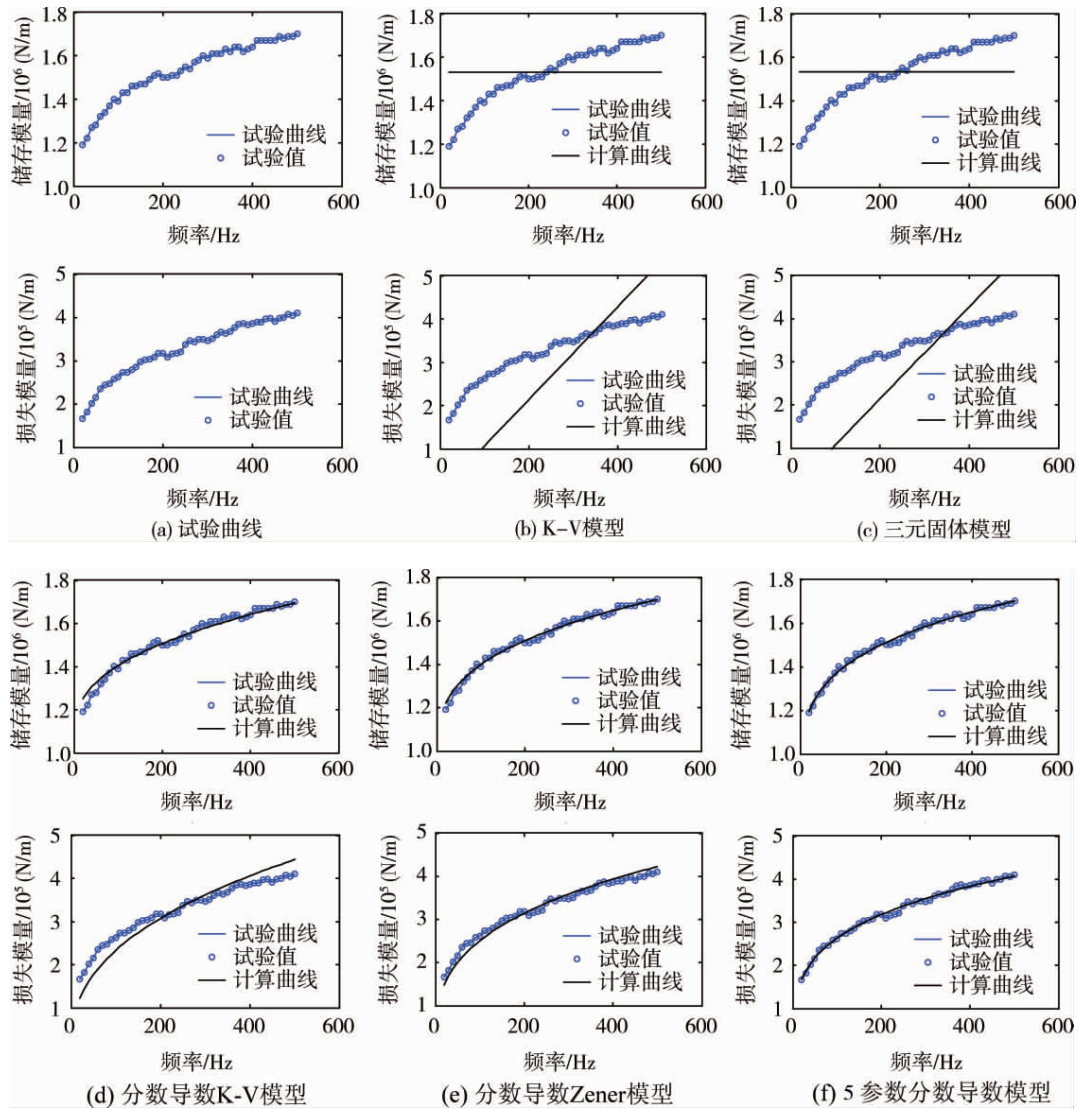


图 5 黏弹性模型理论值与实测值的比较

Fig. 5 Comparison of theoretical values and test values of viscoelastic model

1.4 黏弹性模型参数识别

对于黏弹性模型

$$f_v(t) + af_v^{(\alpha)}(t) = bu(t) + cu^{(\beta)}(t) \quad (9)$$

变换到频域可得

$$f_v(\omega) = E(\omega)u(\omega) = [E_d(\omega) + jE_l(\omega)]u(\omega) \quad (10)$$

式中 $E(\omega)$ 为动态模量, $E_d(\omega)$ 为储存模量, $E_l(\omega)$ 为损失模量.

则有

$$E(\omega) = \frac{f_v(\omega)}{u(\omega)} = \frac{b + c(j\omega)^\beta}{1 + a(j\omega)^\alpha} \quad (11)$$

因为

$$j^\beta = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (12)$$

化简式(11)可得

$$E(\omega) = \frac{b + c\omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right]}{1 + a\omega^\alpha \left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]} \quad (13)$$

$$E(\omega) = \frac{\left[b + c\omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + jc\omega^\beta \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \left[1 + a\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - ja\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]}{\left[1 + a\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^2 + a^2\omega^{2\alpha} \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad (14)$$

$$E(\omega) = E_d(\omega) + jE_l(\omega) \quad (15)$$

$$E_d(\omega) = \left\{ b + ba\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + c\omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + ac\omega^{(\alpha+\beta)} \cos\left[\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right] \right\} / \left[1 + a^2\omega^{2\alpha} + 2a\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \quad (16)$$

$$E_l(\omega) = \left\{ c\omega^\beta \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - ab\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + ac\omega^{(\alpha+\beta)} \sin\left[\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}\right] \right\} / \left[1 + a^2\omega^{2\alpha} + 2a\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \quad (17)$$

$$\eta(\omega) = \frac{E_l(\omega)}{E_d(\omega)} = \frac{c\omega^\beta \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - ab\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + ac\omega^{(\alpha+\beta)} \sin\left[\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}\right]}{b + ba\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + c\omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + ac\omega^{(\alpha+\beta)} \cos\left[\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right]} \quad (18)$$

式中 $\eta(\omega)$ 为损失因子。

由式(16)、式(17)通过最小二乘法拟合得到模型参数 a, b, c, α, β 。表2是隔振器模型的参数拟合结果。

表2 隔振器模型参数拟合结果
Table 2 Isolator model parameter fitting values

参数	拟合值	单位
a	6.98×10^{-4}	$\text{N} \cdot \text{s}^\alpha$
b	8.47×10^5	N/m
c	1.00×10^5	$\text{N} \cdot \text{s}^\beta$
α	0.41	无量纲
β	0.29	无量纲

2 动态特性分析

分数导数中的各个参数对应的影响范围也不同,下面讨论模型参数对于模型储存模量、损失模量和损失因子的影响。其他参数不变,当 α 变化时,如图6所示;其他参数不变,当 β 变化时,如图7所示;其他参数不变,当 a 变化时,如图8所示;其他参数不变,当 b 变化时,如图9所示;其他参数不变,当 c 变化时,如图10所示。可见: α 降低, β, a, b, c 升高,均会造成储存模量升高; α, b 降低, β, a, c 升高,均会造成损失模量升高; b, c 降低, α, β, a 升高,均会造成损失因子升高。参数 b 的变化主要影响储存模量,对损失模量影响不大。参数 β 变化会造成储存模量和损失模量的剧烈变化。

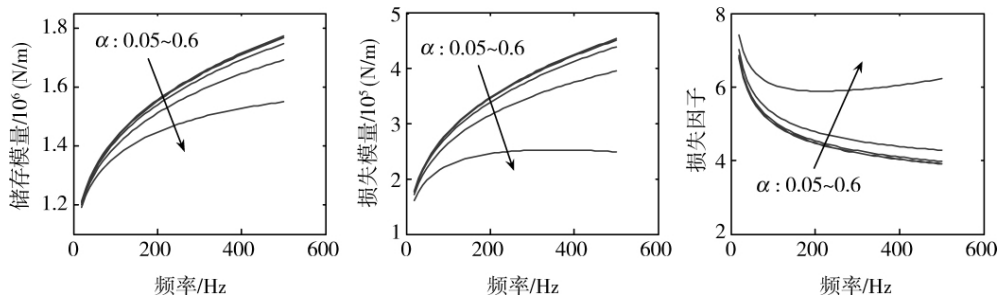


图6 参数 α 对动态模量的影响

Fig. 6 Influence of parameter α on dynamic modulus

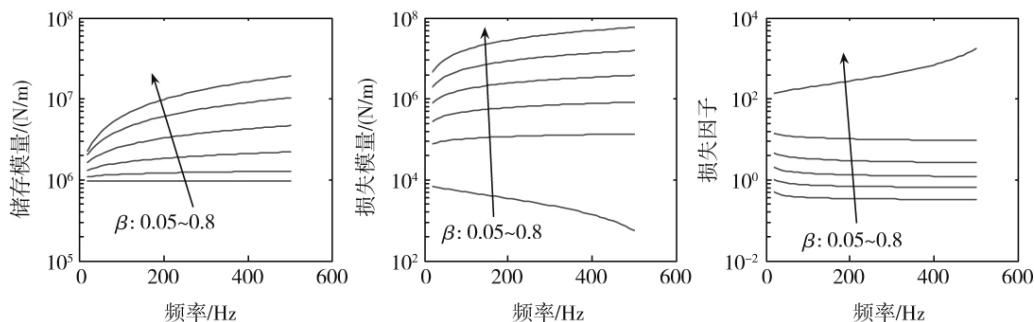
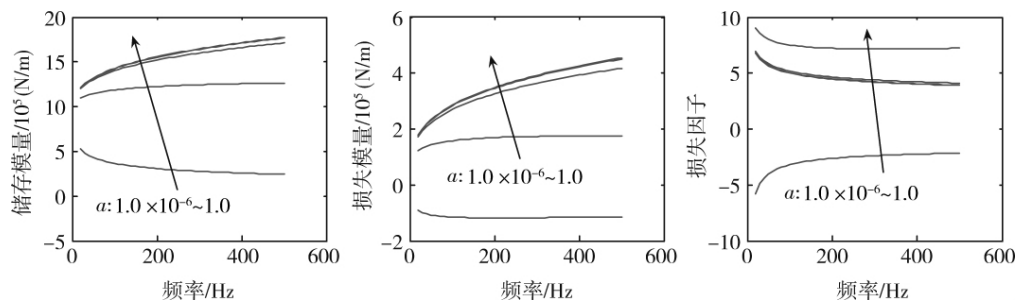
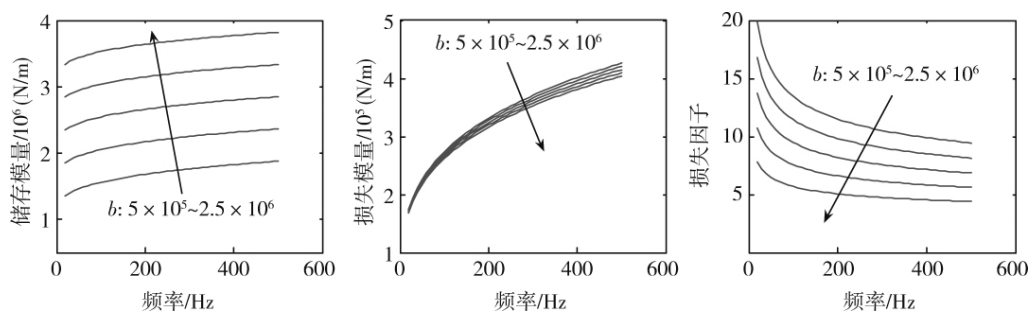
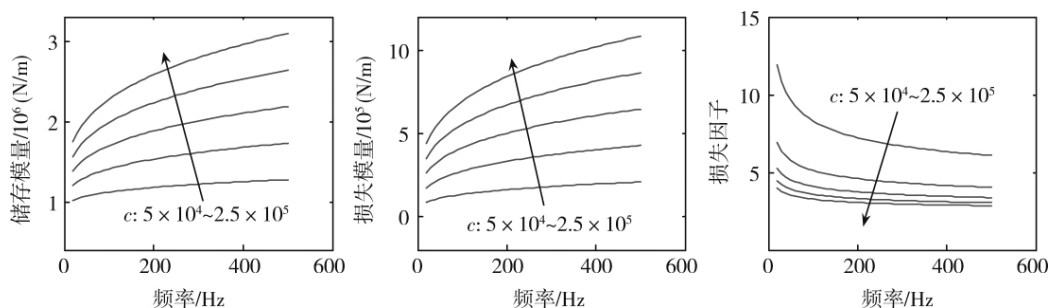


图7 参数 β 对动态模量的影响

Fig. 7 Influence of parameter β on dynamic modulus

图 8 参数 a 对动态模量的影响Fig. 8 Influence of parameter a on dynamic modulus图 9 参数 b 对动态模量的影响Fig. 9 Influence of parameter b on dynamic modulus图 10 参数 c 对动态模量的影响Fig. 10 Influence of parameter c on dynamic modulus

3 模型数值求解

根据定义,导数可以写成以下形式:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (19)$$

重复应用得到

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (20)$$

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)}{(\Delta t)^3} \quad (21)$$

归纳为一般形式

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[(\Delta t)^{-n} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right] \quad (22)$$

其中

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} \frac{n!}{j!(n-j)!} & \text{当 } 0 \leq j \leq n \\ 0 & \text{当 } 0 \leq n < j \end{cases}$$

如果我们用分数 t/N (N 为自然数) 取代时间步长 Δt , 式(22)可以写成

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \right] \quad (23)$$

其中当 $j > n$ 时, $\binom{n}{j} = 0$.

注意到

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)}$$

于是,可以得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \right] = \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad (24)$$

式(24)中导数阶次 n 为自然数. 我们将方程推广为更一般的形式:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \right] \quad (25)$$

其中 $A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. 系数 A_{j+1} 也叫做 Grunwald 系数.

根据 Grunwald 定义, 当 N 取一极大数时, 可以将上式有理数阶导数简化为

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(n-j) \quad (26)$$

根据定义

$$\ddot{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t) + u(t-2) - 2u(t-1)}{(\Delta t)^2} \quad (27)$$

当 N 取一极大值时, $\Delta t = t/N$ 为一极小值, 此时近似得到

$$\ddot{u} \approx \frac{u(t) + u(t-2) - 2u(t-1)}{(\Delta t)^2} \quad (28)$$

于是, 式(1)可以写成

$$m \left[\frac{u(n) + u(n-2) - 2u(n-1)}{(\Delta t)^2} \right] + f_v(n-1) + f_i(n-1) = f(n-1) \quad (29)$$

式中 n 为自然数, (n) 表示 $n\Delta t/N$ 时刻.

$$f_v(n) + a(\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} [A_{j+1} f_v(n-j)] = bu(n) + c(\Delta t)^{-\beta} \sum_{j=0}^{n-1} [A_{j+1} u(n-j)] \quad (30)$$

求解方法: 假设已知 $(n-1)$ 时刻以及 $(n-1)$ 以前的 u, f_i, f_v , 外作用力 f 已知, 由式(29)可以求得 $u(n)$, 代入式(2)、式(30)可得到 $f_i(n), f_v(n)$. 再带回式(29)求出 $u(n+1)$. 以此类推, 求得全时间段位移 $u(t)$.

取初始位移值为 1.0 mm, 系统质量为 1 kg, 使用本文提出的并联模型, 取表 1、表 2 中的参数计算隔振器自由衰减振动的位移响应. 计算结果

如图 11, 位移随时间增加逐渐减小.

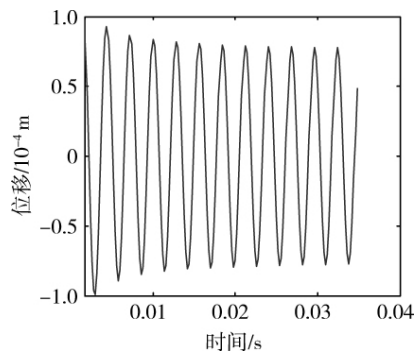


图 11 单自由度系统的位移响应

Fig. 11 Displacement response of single degree of freedom system

4 结 论

本文基于橡胶材料减振机理和试验研究, 提出了一个适合描述橡胶隔振器在较宽频率范围内动态特性的并联模型. 该模型由两部分组成: 一部分是摩擦力模型, 可以满意地反映出橡胶隔振器的振幅相关性; 另一部分是黏弹性模型, 使用分数导数算子, 用较少的参数, 较好地模拟了橡胶隔振器在宽频率范围内的黏弹特性, 可以满意地反映出橡胶隔振器的频率相关性. 本文给出了该模型的一种数值求解方法. 该模型可用于预测含橡胶隔振器系统的动态特性. 文中分析了模型各参数对动态模量的影响, 可用于指导隔振器设计.

参考文献:

- [1] Pritz T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 195(1): 103-115.
- [2] Schmidt A, Gaul L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/2/3/4): 37-55.
- [3] Kim S Y, Lee D H. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 324(3/4/5): 570-586.
- [4] Fukunaga M, Shimizu N, Nasuno H. A nonlinear fractional derivative model of impulse motion for viscoelastic materials[J]. Physica Scripta, 2009, 136: 014010. 1-014010. 6.
- [5] Yajima T, Nagahama H. Differential geometry of viscoelastic models with fractional-order derivatives[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2010, 43(38): 385207. 1-385207. 9.
- [6] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Analysis of damped vibrations of linear viscoelastic plates with damping modeled

- with fractional derivatives[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(10):2703-2711.
- [7] Heymans N. Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behaviour of polymers[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 38(1/2/3/4):221-231.
- [8] Sjöberg M, Kari L. Non-linear behavior of a rubber isolator system using fractional derivatives[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2002, 37(3):217-236.
- [9] Sjöberg M. Nonlinear isolator dynamics at finite deformations; an effective hyperelastic, fractional derivative, generalized friction model[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 33(3):323-336.
- [10] Negrete N G, Vinolas J, Kari L. A simplified methodology to predict the dynamic stiffness of carbon-black filled rubber isolators using a finite element code[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296(4/5):757-776.
- [11] Negrete N G, Vinolas J, Kari L. A nonlinear rubber material model combining fractional order viscoelasticity and amplitude dependent effects[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2009, 76(1):011009. 1-011009. 9.
- [12] Kari L. On the dynamic stiffness of preloaded vibration isolators in the audible frequency range; modeling and experiments[J]. *Journal of Acoustical Society of America*, 2003, 113(4):1909-1921.
- [13] Ortigueira M D. The fractional quantum derivative and its integral representations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(4):956-962.
- [14] Singh S J, Chatterjee A. Beyond fractional derivatives; local approximation of other convolution integrals[J]. *Proceedings of Royal Society A*, 2010, 466(2114):563-581.
- [15] Méhauté A L, Kaabouchi A E. Riemann's conjecture and a fractional derivative[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 59(5):1610-1613.
- [16] Palfalvi A. Efficient solution of a vibration equation involving fractional derivatives[J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2010, 45(2):169-175.